

Dopunski test iz *Matematike*

I UPISNI ROK – JUN 2019

Zadatak 1 | 5 bodova

Srediti izraz:

$$\frac{5x^2 + 9x - 2}{25x^2 - 1}.$$

Rješenje:

$$\frac{5x^2 + 9x - 2}{25x^2 - 1} = \frac{(5x - 1)(x + 2)}{(5x - 1)(5x + 1)} = \frac{2 + x}{1 + 5x}.$$

Zadatak 2 | 8 bodova

Cijena proizvoda je snižena 20%, a zatim je nova cijena povećana za 10%, tako da je trenutna cijena proizvoda 2200 €. Odrediti prvobitnu cijenu proizvoda?

Rješenje:

$$\left(x \cdot \frac{100 - 20}{100}\right) \cdot \frac{100 + 10}{100} = 2200 \text{ €} \Leftrightarrow$$

$$x \cdot 0.8 \cdot 1.1 = 2200 \text{ €} \Leftrightarrow$$

$$x \cdot 0.88 = 2200 \text{ €} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2200 \text{ €}}{0.88} = 2500 \text{ €}.$$

Zadatak 3 | 7 bodova

Odrediti vrijednost izraza:

$$\left(\frac{i^{33}}{\sqrt{2}} - \frac{i^{36}}{\sqrt{2}}\right)^{-4}.$$

Rješenje:

$$i^{33} = i \wedge i^{36} = 1$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{i^{33}}{\sqrt{2}} - \frac{i^{36}}{\sqrt{2}}\right)^{-4} &= \left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4} = \left(\frac{-1 + i}{\sqrt{2}}\right)^{-4} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{-1 + i}\right)^4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{1 - i}\right)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{(1 - i)^4} = \frac{4}{((1 - i)^2)^2} = \frac{4}{(1 + 2i - 1)^2} \\ &= \frac{4}{(2i)^2} = \frac{4}{2^2 i^2} = \frac{4}{4 \cdot (-1)} \\ &= \frac{1}{-1} = -1. \end{aligned}$$

Zadatak 4 | 4 bodova

Koji od datih sistema linearnih nema rješenja?

- a) $2x + 3y = 2 \wedge 4x + 6y = 4$
- b) $2x + 3y = 2 \wedge 6x - 3y = 1$
- c) $2x + 3y = 2 \wedge 6x + 9y = 3$
- d) $2x + 3y = 2 \wedge 5x + 2y = 3$

Rješenje: c), jer je:

$$6x + 9y = 3 \quad | : 3 \Leftrightarrow 2x + 3y = 1.$$

Zadatak 5 | 8 bodova

Koju vrijednost ima parametar m u jednačini $(m + 3)x^2 - (m + 2)x - 1 = 0$?, ako je poznato da za rješenja jednačine x_1 i x_2 važi jednakost $x_1 + x_2 = 0$?

Rješenje:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-b - b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 0$$

$$\frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow b = 0 \wedge a \neq 0.$$

$$b = 0 \Leftrightarrow -(m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

$$a = m + 3 = 1 \neq 0.$$

Zadatak 6 | 7 bodova

Koeficijent pravca prave p , koja prolazi kroz tačku $(-6, 5)$ je $\frac{1}{3}$. Koja od datih tačaka pripada pravoj p ?

- a) $(5, -7)$
- b) $(3, 8)$
- c) $(-2, 6)$
- d) $(-5, 5)$

Rješenje:

$$p: y = \frac{x}{3} + b.$$

$$(-6, 5) \in p \Leftrightarrow 5 = \frac{-6}{3} + b \Leftrightarrow b = 7.$$

$$p: y = \frac{x}{3} + 7.$$

$$b) (3, 8) \in p, \text{ jer } 8 = \frac{3}{3} + 7.$$

Zadatak 7 | 4 boda

Uprostiti izraz:

$$(a + 2)^2 + 2(a + 2)(b - 1) + (b - 1)^2,$$

a zatim izračunajte njegovu vrijednost za $a = 0.6$ i $b = 2.6$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} (a + 3)^2 - 2(a + 3)(b - 1) + (b - 1)^2 \\ = ((a + 3) - (b - 1))^2 \\ = (a + 3 - b + 1)^2 \\ = (a - b + 4)^2 \\ = (0.6 - 2.6 + 4)^2 = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

Zadatak 8 | 9 bodova

Riješiti nejednačinu:

$$\frac{-2}{x^2 + 4x - 5} > 0.$$

Rješenje:

$$\frac{-2}{x^2 + 4x - 5} > 0 \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{x^2 + 4x - 5} < 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) < 0$$

$$\Leftrightarrow -5 < x < 1.$$

Zadatak 9 | 12 bodova

Riješiti jednačinu:

$$4 + \log_3 x = -\frac{3}{\log_3 x}.$$

Rješenje: Uvedemo smjenu $y = \log_3 x$, tj. $x = 3^y$:

$$4 + y = -\frac{3}{y} \quad | \cdot y, y \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2 + 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3} \vee x = 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Zadatak 10 | 12 bodova

Izračunaj $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, ako je poznato da je $\sin \alpha = -0.3$ i $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Rješenje:

$$\alpha = \sin^{-1}(-0.3) = -0.30470 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

$$\sin\left(-0.30470 + \frac{\pi}{2}\right) = 0.95394.$$

Zadatak 11 | 12 bodova

Odrediti površinu i zapreminu kupe, koja za osnovu ima krug prečnika $R = 8 \text{ cm}$, a visina kupe je $H = 12 \text{ cm}$.

Rješenje:

$$r = \frac{8 \text{ cm}}{2} = 4 \text{ cm}.$$

$$P = r\pi\left(r + \sqrt{r^2 + H^2}\right).$$

$$\begin{aligned}
 P &= 4 \text{ cm} \cdot \pi \left(4 \text{ cm} + \sqrt{4^2 \text{ cm}^2 + 12^2 \text{ cm}^2} \right) \\
 &= 4\pi(4 + \sqrt{16 + 144}) \text{ cm}^2 \\
 &= 4\pi(4 + 2\sqrt{4 + 36}) \text{ cm}^2 \\
 &= 4\pi(4 + 4\sqrt{1 + 9}) \text{ cm}^2 \\
 &= 16\pi(1 + \sqrt{10}) \\
 &\approx 209.219 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{H}{3} r^2 \pi = \frac{12 \text{ cm}}{3} 4^2 \text{ cm}^2 \pi \\
 &= 4 \cdot 4^2 \cdot \pi \text{ cm}^3 = 64\pi \text{ cm}^3 \\
 &\approx 201.062 \text{ cm}^3.
 \end{aligned}$$

Zadatak 12 | 12 bodova

Date su funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{3}{x+2}.$$

Odrediti domen i nule funkcije

$$h(x) = 2f(x) - g(x).$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= 2f(x) - g(x) = 2 \cdot \frac{1}{x-4} - \frac{3}{x+2} \\
 &= \frac{2}{x-4} - \frac{3}{x+2} \\
 &= \frac{2(x+2) - 3(x-4)}{(x-4)(x+2)} \\
 &= \frac{2x+4 - 3x+12}{(x-4)(x+2)} \\
 &= \frac{16-x}{(x-4)(x+2)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}.$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 16.$$